

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2026
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = 0$

A2. Τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

A3. Πότε η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{A}$ το $f(x_0)$;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0, x \in [\alpha, \beta]$

β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 , τότε $f'(x_0) = 0$.

γ. Αν f είναι μια συνεχή συνάρτηση στο \mathbb{R} και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

δ. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει ότι η παράγωγος f' είναι συνεχής στο Δ .

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1 στο Δ , τότε υπάρχει υποχρεωτικά σημείο $x_0 \in \Delta$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f : y = f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1), x \in [0, +\infty)$

B1. Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(6 μονάδες)

B2. Να αιτιολογηθεί για ποιο λόγο η f αντιστρέφεται και να λυθεί η εξίσωση

$$f^{-1}(x) = 0.$$

(5 μονάδες)

B3. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in [0, +\infty)$ η εφαπτομένη της Cf στο σημείο

$$M(x, f(x)) \text{ σχηματίζει με τον άξονα } xx' \text{ γωνία μεγαλύτερη από } 45^\circ$$

(7 μονάδες)

B4. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - x^2 = \ln \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^8 + 1}}, x \in \mathbb{R}$

(7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει:

$$f(x) \leq x^2 - 3x + 1 + \frac{f(0) + f(1)}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Γ1 Να δειχθεί ότι: $f(0) - f(1) = 2$ (6 Μονάδες)

Γ2 Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) - f(1) = \frac{3}{2} \quad (4 \text{ Μονάδες})$$

Γ3 Να δειχθεί ότι υπάρχουν $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ με $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ για τα οποία ισχύει:

$$\frac{1}{f'(\varepsilon_1)} + \frac{3}{f'(\varepsilon_2)} = -2 \quad (8 \text{ Μονάδες})$$

Γ4 Να δειχθεί ότι : $f'(0) - f'(1) = -2$ (7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 2x, x \geq 1$

Δ1. Δείξτε ότι η $f(x) \geq 0$ και να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα .

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) $y = x - 1$, εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f .

Δ3. Έστω F μια αρχική της f στο $[1, e]$, με $F(1) = 0$

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \frac{F(e)}{e-1}$

ii) Αποδείξτε ότι : $\frac{(e-1)^2}{2} < \int_1^e f(x) dx < (e-1)f(e)$.

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(e-1)F(x) = \int_1^e f(t)dt$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Δ5. Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(x) = \frac{(e-1)^2}{4}$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Επιμέλεια: Από την ομάδα των Μαθηματικών μας

ΔΡΑΚΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ