

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**  
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2026**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**A1.** σελίδα σχολικού βιβλίου 105

**A2.** σελίδα σχολικού βιβλίου 123

**A3.** σελίδα σχολικού βιβλίου 140

**A4.** Λ-Σ-Λ-Λ-Σ

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B1.} \quad f'(x) &= (2x + \ln(x^2 + 1))' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + 2x}{x^2 + 1} = \\
 &= \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}, x \in (0, +\infty)
 \end{aligned}$$

για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $2x^2 + 2x + 1 > 0$

άρα  $f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \eta f(\uparrow)$  στο  $[0, +\infty)$

**B2.** Από (α) ερώτημα :  $\eta f(\uparrow)$  στο  $[0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta f$  είναι "1-1" στο  $[0, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta f$  είναι ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΗ στο  $[0, +\infty)$

**Τότε:**  $f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 + \ln(0^2 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \ln 1 \Rightarrow x = 0$

**B3.** Αρκεί να δείξω ότι:  $f'(x) > 1, \forall x \in A$

$$f'(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 > x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow x(x + 2) > 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x$			+
$x + 2$			+
$x(x + 2)$			+

άρα  $x(x + 2) > 0, \forall x \in [0, +\infty)$

**B4.**

$$\begin{aligned}
 x^4 - x^2 &= \ln \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^8 + 1}} \Leftrightarrow x^4 - x^2 = \ln \left( \frac{x^4 + 1}{x^8} \right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^4 - x^2 &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^4 + 1}{x^8 + 1} \right) \Leftrightarrow 2x^4 - 2x^2 = \ln(x^4 + 1) - \ln(x^8 + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2x^4 + \ln(x^8 + 1) &= 2x^2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow f(x^4) = f(x^2)^{f:1-1} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^4 = x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \eta' \\ x = 1 \\ \eta' \\ x = -1 \end{cases}$$

**Γ1.** από (Υ) έχω:  $f(x) \leq x^2 - 3x + 1 + \frac{f(0) + f(1)}{2}, \forall x \in R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0: f(0) \leq 1 + \frac{f(0) + f(1)}{2} \\ x = 1: f(1) \leq -1 + \frac{f(0) + f(1)}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f(0) \leq 2 + f(1) + f(0) \\ 2f(1) \leq -2 + f(1) + f(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) - f(1) \leq 2 \\ f(0) - f(1) \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) - f(1) = 2$$

**Γ2.** Θεωρώ:  $G(x) = f(x) - f(1) - \frac{3}{2}, x \in [0, 1]$

- η  $G$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$
- $G(0) = f(0) - f(1) - \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} > 0$
- $G(1) = f(1) - f(1) - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0$

(Θ. Bolzano) υπάρχει  $x_0 \in (0, 1): G(x_0) = 0 \Rightarrow G(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - f(1) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_0) - f(1) = \frac{3}{2}$$

**Γ3.**

- η  $f$  είναι συνεχής στα  $[0, x_0], [x_0, 1]$
- η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα  $(0, x_0), (x_0, 1)$

$$(\Theta\text{M}\Gamma) \left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon_1 \in (0, x_0) : f'(\varepsilon_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \\ \exists \varepsilon_2 \in (x_0, 1) : f'(\varepsilon_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} = \frac{1 - x_0}{f(x_0) - f(0)} \\ \frac{1}{f'(\varepsilon_2)} = \frac{1 - x_0}{f(1) - f(x_0)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} = \frac{x_0}{f(1) + \frac{3}{2} - f(0)} \\ \frac{1}{f'(\varepsilon_2)} = \frac{1 - x_0}{-\frac{3}{2}} \end{array} \right\} \xrightarrow{(\alpha)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} = \frac{x_0}{-2 + \frac{3}{2}} \\ \frac{1}{f'(\varepsilon_2)} = \frac{-2(1 - x_0)}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} = \frac{x_0}{-\frac{1}{2}} \\ \frac{3}{f'(\varepsilon_2)} = -2(1 - x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} = -2x_0 \\ \frac{3}{f'(\varepsilon_2)} = -2 + 2x_0 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \frac{1}{f'(\varepsilon_1)} + \frac{3}{f'(\varepsilon_2)} = -2$$

**Γ4.** Θεωρώ  $D(x) = f(x) - x^2 + 3x - 1 - \frac{f(0) + f(1)}{2}, x \in \mathbb{R}$

$$\mu\epsilon \left\{ \begin{array}{l} D(0) = f(0) - 1 - \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{2f(0) - 2 - f(0) - f(1)}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0 \\ D(1) = f(1) + 1 - \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{2f(1) + 2 - f(0) - f(1)}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \end{array} \right.$$

από (Υ) έχω:  $D(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(x) \leq D(0) \\ \text{και} \\ D(x) \leq D(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η γραφική παράσταση στα } x_1 = 0, x_2 = 1$$

Παρουσιάζει μέγιστο η  $D$  είναι παραγωγίσιμη στα  $x_1 = 0, x_2 = 1$

άρα από θεώρημα FERMAT  $\Rightarrow D'(0) = D'(1) = 0$

$$D'(x) = f'(x) - 2x + 3, x \in \mathbb{R}$$

**A1.** η  $f$  δυο φορές παραγωγίσιμη, άρα  $f'(x) = e^{x-1} + 2(x-1) > 0$ , για κάθε  $x > 1$ .  
 η  $f$  συνεχής στο  $[1, +\infty)$ , άρα είναι γνησίως αύξουσα, στη θέση  $x = 1$ , παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το  $f(1) = 0$ , άρα ισχύει ότι  $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0, x \in [1, +\infty)$   
 Επίσης  $f''(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ , άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $[1, +\infty)$ .

**A2.** Θα πρέπει να υπάρχει ένα  $x_0 \in [1, +\infty)$ , έτσι ώστε  $f'(x_0) = 1$  και  $f(x_0) = x_0 - 1$ .  
 $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow e^{x_0-1} + 2x_0 - 3 = 0$ , η οποία έχει προφανή λύση την  $x_0 = 1$ , η οποία είναι και μοναδική επειδή η συνάρτηση  $h(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ , είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η ευθεία ( $\varepsilon$ ) εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $f$  στο 1.

**A3.** εφαρμογή Θ.Μ.Τ για την  $F$  στο διάστημα  $[1, e]$   
 Η  $f$  είναι κυρτή άρα  $f(x) \geq x - 1$ , με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1, άρα

$$\int_1^e f(x) dx > \int_1^e (x-1) dx \Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx > \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx > \frac{(e-1)^2}{2}$$

Επίσης στο διάστημα  $[1, e]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα άρα  $1 \leq x \leq e \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(e)$ , δηλαδή

$$\int_1^e f(x) dx < \int_1^e f(e) dx \Leftrightarrow \int_1^e f(x) dx < f(e)(e-1)$$

**A4.** Θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση  $g(x) = (e-1)F(x) - \int_1^e f(t) dt$

$$\int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = F(e)$$

$g(1) = (e-1)F(1) - F(e) = -F(e) < 0$ , γιατί  $F'(x) = f(x) > 0$ , για  $x > 1$ , άρα η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή για

$$e > 1 \Leftrightarrow F(e) > F(1) \Leftrightarrow F(e) > 0 \Leftrightarrow -F(e) < 0$$

$$g(e) = (e-2)F(e) > 0$$

Δ5. η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, e]$ , άρα το σύνολο τιμών της είναι το  $F([1, e]) = [F(1), F(e)] = [0, F(e)]$

Από το Δ3 έχουμε ότι

$$\frac{(e-1)^2}{2} < \int_1^e f(x) dx \Leftrightarrow \frac{(e-1)^2}{2} < F(e) - F(1) \Leftrightarrow \frac{(e-1)^2}{2} < F(e)$$

$$0 < \frac{(e-1)^2}{4} < \frac{(e-1)^2}{2} < F(e)$$

Άρα ανήκει στο σύνολο τιμών της  $F$ , είναι και γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική λύση.

*Επιμέλεια: Από την ομάδα των Μαθηματικών μας*