ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών. Ποια η γεωμετρική του ερμηνεία ;

(Μονάδες 6+4)

Α2. Πότε μία συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

(Μονάδες 5)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) :

α) Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη σ'αυτό .

β) Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης ορισμένης στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, είναι πάντα κλειστό διάστημα .

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)$.

δ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της .

ε) Αν η f είναι ορισμένη στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ και F μία αρχική της f στο Δ τότε ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha).$$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+e^\alpha & , -2\le x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha & , 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

(Μονάδες 5)

Β2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα . Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει σημεία καμπής.

(Μονάδες 10)

Β3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=0$.

(Μονάδες 5)

Β4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x, την ευθεία $y=1$ και τις κάθετες ευθείες $x=-1$ και $x=0$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$
- $x\cdot f'(x)=f(x)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^2+2x$, $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

(Μονάδες 5)

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2-1)=1$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1,x_2\in(0,2)$, με $x_1<1<x_2$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1)+f(x_2)=1$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)\cdot\ln f(x)=e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

Δ2. Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς x_1,x_2 , ισχύει :

$$f'(x_1)+x_2>f(x+1)$$

να αποδείξετε ότι $f(x_1)<x_2$ **(Μονάδες 6)**

Δ3.

α) Να δείξετε ότι $f(1)=e$

β) Αν F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$, να λυθεί η εξίσωση :

$$e\cdot F(f(x))=F(e)\cdot f(x)\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$ **(Μονάδες 5+5)**

Δ4. Να δειχθεί ότι : $\int_{-1}^{1}x\cdot f(x)dx>0$ **(Μονάδες 4)**

Επιμέλεια: Από την ομάδα των Μαθηματικών μας