ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 140

Α3. α-Λ , β-Σ ,γ-Λ , δ-Λ , ε-Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f συνεχής στο $x=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow e^{\alpha}=\alpha+1$, η οποία έχει μοναδική λύση για $\alpha=0$.

Β2. Για $-2<x<0$ έχουμε $f''(x)=2>0$, δηλαδή η f κυρτή για $-2<x<0$

Για $0<x<\frac{\pi}{2}$, έχουμε $f''(x)=\frac{\eta\mu x(2-x^2)-2x\sigma\upsilon\nu x}{x^3}$, θεωρώντας τη συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x(2-x^2)-2x\sigma\upsilon\nu x$, βρίσκουμε ότι $f''(x)<0$, άρα η f κοίλη .

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$, και το 0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και η f ΄΄ αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 0 , η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο (0,1) , άρα το σημείο Α(0,1) είναι σημείο καμπής .

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=1$

Β4. Επειδή η f κυρτή στο διάστημα $[-2,0]$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι πάνω απο την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής δηλαδή $f(x)\geq 1$, άρα

$$\int_{-1}^{0}|f(x)-1|dx=\int_{-1}^{0}(f(x)-1)dx=\int_{-1}^{0}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]=\frac{1}{3}\text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x\neq 0$ έχουμε $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-1\Leftrightarrow\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=(-x)'$, άρα

για $x<0$, $\dfrac{f(x)}{x}=-x^2+c_1\Leftrightarrow f(x)=-x^2+c_1x$

για $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=-x^2+c_2\Leftrightarrow f(x)=-x^2+c_2x$

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\Leftrightarrow f'(0)=2$,

δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2\Leftrightarrow c_1=c_2=2$

Άρα $f(x)=-x^2+2x$ για $x\neq 0$ και $f(0)=0$ δηλαδή $f(x)=-x^2+2x$, $x\in\mathbb{R}$

Γ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα για $x\leq 1$, και γνησίως φθίνουσα για $x\geq 1$, στη θέση $x=1$, παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1)=1$

Γ3. Επειδή η f παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο στη θέση $x=1$, η εξίσωση γράφεται

$f(x^2-1)=1\Leftrightarrow x^2-1=1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Γ4. Με εφαρμογή του θεωρήματος των ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$ προκύπτει το ζητούμενο . Και λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά τα σημεία είναι και μοναδικά .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από (y) έχω: $f(x)\cdot\ln f(x)=e^x$, για κάθε $x\in\Re$

$$\Rightarrow(f(x)\cdot\ln f(x))'=(e^x)'\Rightarrow f'(x)\cdot\ln f(x)+f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}=e^x$$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{x\cdot f(x)}}{e^x+f(x)}>0$, για κάθε $x\in\Re$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

$f''(x)=\left(\dfrac{e^x\cdot f(x)}{e^x+f(x)}\right)'\Rightarrow f''(x)=\dfrac{e^x\cdot f^2(x)+e^{2x}\cdot f'(x)}{(e^x+f(x))^2}>0$, για κάθε $x\in\Re$

$\Rightarrow$ η f είναι κυρτή στο $\Re$.

Δ2. Εφαρμόζουμε για την f το Θ.Μ.Τ στο $[x_{1,}x_1+1]$

Άρα $\exists x_0\in(x,x+1):\ f'(x_0)=\dfrac{f(x_1+1)-f(x_1)}{x_1+1-x_1}\Rightarrow f'(x_0)=f(x_1+1)-f(x_1)$

$x_0>x_1\overset{f'(\uparrow)}{\Rightarrow} f'(x_0)>f'(x_1)\Rightarrow f(x_1+1)-f(x_1)>f'(x_1)>f(x_1+1)-f(x_2)$

$\Rightarrow f(x_1+1)-f(x_1)>f(x_1+1)-x_2\Rightarrow -f(x_1)>-x_2\Rightarrow f(x_1)<x_2$

Δ3. α) Από (y) έχω: $f(x)\cdot\ln f(x)=e^x$

$\overset{x=1}{\Rightarrow} f(1)\cdot\ln f(1)=e\Rightarrow \ln f(1)=\dfrac{e}{f(1)}\Rightarrow \ln f(1)-\dfrac{e}{f(1)}=0$

Άρα η τιμή $f(1)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\ln x-\dfrac{e}{x}=0$

Η οποία έχει μοναδική ρίζα την $x=e$

Άρα $f(1)=e$

β) $e\cdot F(f(x))=F(e)\cdot f(x)\Leftrightarrow \dfrac{F(f(x))}{f(x)}=\dfrac{F(e)}{e}$ **(τ)**

Θεωρώ $D(x)=\dfrac{F(x)}{x},\ x>0\ \Rightarrow$

$D'(x)=\left(\dfrac{F(x)}{x}\right)'\Rightarrow D'(x)=\dfrac{xf(x)-F(x)}{x^2},\ \ x>0$

Θεωρώ $Q(x)=xf(x)-F(x),\ x\geq 0\ \Rightarrow$

$Q'(x)=(xf(x)-F(x))'\Rightarrow Q'(x)=xf'(x),\ \ x>0$

$Q'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)\Rightarrow$ η Q είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Άρα αν $x>0\ \overset{Q(\uparrow)}{\Rightarrow} Q(x)>Q(0)\Rightarrow Q(x)>0$, για κάθε $x>0$

Τότε: $D'(x)>0$, για κάθε $x>0$ $\Rightarrow$η D είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

$\Rightarrow$η D είναι "$1-1$" στο $(0,+\infty)$

(τ): $\dfrac{F(f(x))}{f(x)}=\dfrac{F(e)}{e}\Rightarrow D(f(x)-D(e)\overset{"1-1"}{\Rightarrow} f(x)=e\Rightarrow f(c)-f(1)\overset{"1-1"}{\Rightarrow} x=1$

Δ4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{1}xf(x)dx$ (L)

Αν $x\in[-1,0]\Rightarrow x\le 0\overset{f(\uparrow)}{\Rightarrow} f(x)\le f(0)\Rightarrow xf(x)\ge x(f0)$

$\displaystyle\Rightarrow\int_{-1}^{0}xf(x)dx>\int_{-1}^{0}xf(0)dx\Rightarrow\int_{-1}^{0}xf(x)dx>f(0)\cdot\int_{-1}^{0}xdx\Rightarrow\int_{-1}^{0}xf(x)dx>-\frac{f(0)}{2}$

Όμοια:

$\displaystyle\int_{-1}^{0}xf(x)dx>-\frac{f(0)}{2}+\int_{0}^{1}xf(x)dx>\frac{f(0)}{2}\Rightarrow\int_{-1}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{1}xf(x)dx>-\frac{f(0)}{2}+\frac{f(0)}{2}$

$\displaystyle\overset{(L)}{\Rightarrow}\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$

Επιμέλεια: Από την ομάδα των Μαθηματικών μας