

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ.106

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 213

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ.128

- A4.** i. Σωστή
ii. Σωστή
iii. Λανθασμένη
iv. Λανθασμένη
v. Λανθασμένη

ΘΕΜΑ Β

B1. $f'(x) = (x+2) \cdot e^x \Leftrightarrow f'(x) = (x+1) \cdot e^x + e^x \Leftrightarrow f'(x) = (x+1) \cdot e^x + (x+1)' \cdot e^x \Leftrightarrow$

$$f'(x) = ((x+1) \cdot e^x)' \Leftrightarrow f(x) = (x+1) \cdot e^x + c \quad (1)$$

Για $x=0$ από την (1) προκύπτει $f(0) = 1+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$

Άρα, $f(x) = (x+1) \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$

B2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot e^x > 0 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x+2) \cdot e^x < 0 \Leftrightarrow x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

$$f''(x) = e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot e^x > 0 \Leftrightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x+3) \cdot e^x < 0 \Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$.

Στη θέση $x = -2$, η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-2) = -\frac{1}{e^2}$.

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, -3]$.

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[-3, +\infty)$.

B3. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(0,1)$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 2 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

B4. Στο διάστημα $[-2, 0]$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $X_0 = 0$. Συνεπώς, $f(x) \geq 2x + 1$ για κάθε $x \in [-2, 0]$ και η ισότητα ισχύει για $x = 0$.

$$\text{Έχουμε } \int_{-2}^0 f(x) dx > \int_{-2}^0 (2x + 1) dx$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > \left[x^2 + x \right]_{-2}^0$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > (0^2 + 0) - ((-2)^2 - 2)$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > -4 + 2$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx > -2$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx + 2 > 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση γνωρίζω: $f(x) \leq 2 - x + \frac{f(1) + f(3)}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1: f(1) \leq \frac{f(1) + f(3)}{2} \\ x=3: f(3) \leq -1 + \frac{f(1) + f(3)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2f(1) \leq 2 + f(1) + f(3) \\ 2f(3) \leq -2 + f(1) + f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2f(1) - f(1) - f(3) \leq 2 \\ f(1) + f(3) - 2f(3) \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(1) - f(3) \leq 2 \\ f(1) - f(3) \geq 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) - f(3) = 2$$

Γ2. Από Γ1 ερώτημα: $f(1) - f(3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 + f(3) \\ f(3) = f(1) - 2 \end{cases}$

Από υπόθεση έχω: $f(x) \leq 2 - x + \frac{f(1) + f(3)}{2} \Rightarrow f(x) + x \leq 2 + \frac{f(1) + f(3)}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) + x \leq 2 + \frac{2 + f(3) + f(3)}{2} \\ f(x) + x \leq 2 + \frac{f(1) + f(1) - 2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) + x \leq 2 + f(3) + 1 \\ f(x) + x \leq 2 + f(1) - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) + x \leq f(3) + 3 \\ f(x) + x \leq f(1) + 1 \end{array} \right.$$

Θεωρώντας την $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$ έχω:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x) \leq g(3) \\ g(x) \leq g(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η } C_g \text{ στα } x_1 = 1, x_2 = 3 \text{ παρουσιάζει ακρότατα.}$$

Άρα, από Θεώρημα Fermat προκύπτει: $g'(1) = g'(3) = 0$

$$g'(x) = (f(x) + x)' \Rightarrow g'(x) = f'(x) + 1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα, } \left\{ \begin{array}{l} g'(1) = 0 \\ g'(3) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1) + 1 = 0 \\ f'(3) + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = -1 \\ f'(3) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Οι τιμές 1,3 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = -1$.

Για την f επίσης ισχύει:

- Η f ΣΥΝΕΧΗΣ στο $[1, 3]$
- Η f ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΗ στο $(1, 3)$

$$(\text{Θ.Μ.Τ.}) \text{ υπάρχει } x_0 \in (1, 3): f'(x_0) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{-2}{2} \Rightarrow f'(x_0) = -1$$

Άρα, η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει τρεις τουλάχιστον διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

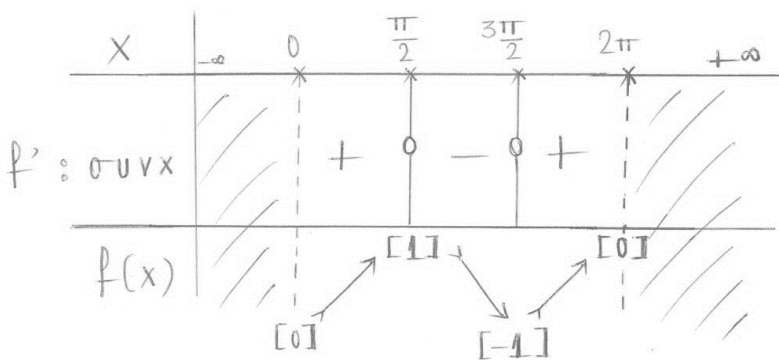
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, 4]$ έχω ότι υπάρχει $x_1 \in (1, 4): f'(x_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3}$.

Επειδή ο αριθμός $\frac{f(4) + f(1)}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των $f(1), f(4)$ από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_2 \in (1, 4): f(x_2) = \frac{f(4) + f(1)}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα, υπάρχουν } x_1, x_2 \in (1, 4) \quad f'(x_1) \cdot f(x_2) &= \frac{f(4) - f(1)}{3} \cdot \frac{f(4) + f(1)}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in (1, 4): f^2(4) - f^2(1) &= 6 f'(x_1) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

$$\text{Δ2. } f'(x) = \left(\frac{4 \eta \mu x}{4 - \sigma \upsilon \nu^2 x} \right)' = \frac{4 \cdot \sigma \upsilon \nu x \cdot (2 + \sigma \upsilon \nu^2 x)}{(4 - \sigma \upsilon \nu x)^2}, \quad x \in (0, 2\pi)$$



$$\Delta 3. \quad f(\pi \cdot 2^{x-1}) - f\left(\frac{3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2}\right) \geq 2 \Leftrightarrow 1 - f(\pi \cdot 2^{x-1}) + 1 + f\left(\frac{3\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x}{2}\right) \leq 0$$

$$\text{Για κάθε } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ έχω: } \begin{cases} 0 < \pi \cdot 2^{x-1} < 2\pi \\ 0 \leq \frac{3\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x < 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Άρα, για } a = \pi \cdot 2^{x-1} \text{ και } \beta = \frac{3\pi}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x \text{ έχω:}$$

$$1 - f(a) + 1 + f(\beta) \leq 0 \text{ για } \alpha, \beta \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Από Γ2 ερώτημα έχω: } -1 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} f(\alpha) \leq 1 \\ f(\beta) \geq -1 \end{cases} \Rightarrow 1 - f(\alpha) + 1 + f(\beta) \geq 0$$

Άρα,

$$(1 - f(a)) + (1 + f(\beta)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = 1 \\ \text{και} \\ f(\beta) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \text{και} \\ \beta = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{x-1} = \frac{1}{2} \\ \text{και} \\ \sigma\upsilon\nu x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ \text{και} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

$$\Delta 4. \quad E(\Omega) = \int_0^\pi \frac{4\eta\mu x}{4 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

$$\underline{\text{Θέτω:}} \quad \sigma\upsilon\nu x = u \Rightarrow -\eta\mu x dx = du$$

$$\begin{cases} x = \pi \Rightarrow u = \sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow u = -1 \\ x = 0 \Rightarrow u = \sigma\upsilon\nu 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= -\int_1^{-1} \frac{4}{4-u^2} du = -\int_1^{-1} \frac{4}{u^2-4} du = -\int_1^{-1} \frac{4}{(u-2)(u+2)} du = -\int_1^{-1} \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} \right) du = \\ &= (\ln|u+2|)_{-1}^1 - (\ln|u-2|)_{-1}^1 = \ln 9 \tau. \mu. \end{aligned}$$