

ΘΕΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

1. Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
(5 Μονάδες)
2. Πότε μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο;
(4 Μονάδες)
3. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών.
(8 Μονάδες)
4. Να χαρακτηριστούν ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) οι προτάσεις:
α) Αν $a \in (0,1)$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a^x) = +\infty$
β) Έστω f, g ΣΥΝΕΧΗΣ στο $\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.
γ) Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.
δ) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} \kappa \cdot f(x)dx = \kappa \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
(8 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x, \quad x > 0$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

- 1) Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ g$.

(5 Μονάδες)

- 2) Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = -\ln(x-1)$, $x > 1$ να δειχθεί ότι η h αντιστρέφεται και να βρεθεί η h^{-1} .

(6 Μονάδες)

3) Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = 1 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετηθεί η φ ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της.

(8 Μονάδες)

4) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες της συνάρτησης φ .

(6 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1) Ναδειχθεί ότι $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, αν x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής της Cf και x_3 η θέση ακρότατου, ναδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

(5+5 Μονάδες)

2) Αν $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη της Cf στο σημείο $M(1, f(1))$ εφάπτεται και της Cg στο σημείο $N(0, g(0))$.

(8 Μονάδες)

3) Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot f'(x))$$

(7 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \cdot y \neq 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$

1) Ναδειχθεί ότι η f είναι ΠΕΡΙΤΤΗ στο $\mathbb{R}$.

(6 Μονάδες)

2) Ναδειχθεί ότι f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(5 Μονάδες)

3) Να λυθεί η εξίσωση: $f\left(\frac{\sigma\nu\nu x - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x}\right) = \ln(\sigma\varphi x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(7 Μονάδες)

4) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και ναδειχθεί ότι: $0 < \int_0^1 f(x)dx < 1$.

(7 Μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΔΡΑΚΟΣ