

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- 1) Ορισμός Σχολικού Βιβλίου
- 2) Ορισμός Σχολικού Βιβλίου
- 3) Απόδειξη Σχολικού Βιβλίου
- 4) α. $\Lambda - \beta$. $\Lambda - \gamma$. $\Sigma - \delta$. Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1)} \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{ΠΟ}_g \\ \text{και} \\ g(x) \in \text{ΠΟ}_f \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1 \\ \text{και} \\ \frac{1}{x-1} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{1}{x-1} = -\ln(x-1)$$

$$\text{B2)} h'(x) = (-\ln(x-1))' = -\frac{1}{x-1} < 0, \text{ για κάθε } x > 1 \Rightarrow \text{η } h(\downarrow) \text{ στο } (1, +\infty) \Rightarrow \text{η } h: "1-1" \text{ στο } (1, +\infty)$$

Άρα η h αντιστρέφεται με $h^{-1}(x) = 1 + e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{B3)} \varphi'(x) = (1 + e^{-x})' = -e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $\varphi'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η φ είναι $(\downarrow)$ στο $\mathbb{R}$ και η φ ΔΕΝ έχει ακρότατα.

Επειδή $\varphi''(x) = e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ η C_φ είναι ΚΥΡΤΗ στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ.

B4) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1 \Rightarrow$ η $(\varepsilon): y = 1$ είναι ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_φ στην περιοχή του $(+\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1+e^{-x})'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$, η C_φ ΔΕΝ έχει ασύμπτωτη στην περιοχή του $(-\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Από (Y) έχω: $f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)}$, για κάθε $x \in \mathcal{R} \Rightarrow$

$$f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2x \Rightarrow (e^{f(x)})' = (x^2)' \Rightarrow e^{f(x)} = x^2 + c, x \in \mathcal{R} \xrightarrow{x=0} c = 1$$

Άρα $e^{f(x)} = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \ln(x^2 + 1), x \in \mathcal{R}$.

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathcal{R}$$

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathcal{R}$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_3 = 0$ το $f(0) = 0$ και καμπή στα σημεία $x_1 = -1$ με $A(-1, \ln 2)$ και $x_2 = 1$ με $B(1, \ln 2)$.

Άρα $A(-1, \ln 2)$, $B(1, \ln 2)$, $\Gamma(0, 0) = 0$.

Εύκολα προκύπτει ότι $ΑΓ = ΒΓ$ άρα το $\triangle AB\Gamma$ είναι ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ.

Γ2) $g(0) = f(1) - 1$

$$g'(x) = (f(x^2 + x + 1) - 1)' \Rightarrow g'(x) = (2x + 1) \cdot f'(x^2 + x + 1), x \in \mathcal{R}$$

$$g'(0) = f'(1)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ δίνεται από τον τύπο $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + f(1) - 1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$y - g(0) = g'(0) \cdot x \Rightarrow y - (f(1) - 1) = x \Rightarrow y = x + f(1) - 1.$$

Άρα, η $(\varepsilon): y = x + f(1) - 1$ είναι κοινή εφαπτομένη της C_f , C_g στα $M(1, f(1))$ και $N(0, g(0))$ αντίστοιχα.

Γ3)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot f'(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \cdot \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] = 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot f'(x)) = 0$$

$$\text{Διότι ισχύουν: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2 + 1))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Γ4)

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \eta \mu x \cdot dx = - \int_{\pi}^{-\pi} f(-h) \cdot \eta \mu(-h) \cdot dh \stackrel{\theta \acute{\epsilon} \tau \alpha \chi}{x=-h} = - \int_{\pi}^{-\pi} f(h) \cdot (-\eta \mu h) \cdot dh = \int_{\pi}^{-\pi} f(h) \cdot \eta \mu h \cdot dh = - \int_{-\pi}^{\pi} f(h) \cdot \eta \mu h \cdot dh = -I$$

$$\text{Άρα, } I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \eta \mu x \cdot dx = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1) \text{ Από (Y) έχω: } f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathfrak{R}, x \cdot y \neq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y = 0: f(0) + f(0) + f(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \\ y = -x: f(x) + f(-x) = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η f ΠΕΡΙΤΤΗ στο $\mathfrak{R}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(-x)}{h} \stackrel{(Y)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{x+h+(-h)}{1-(x+h) \cdot (-x)}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{h}{x^2 + xh + 1}\right)}{h} =$$

$$\Delta 2) \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f\left(\frac{h}{x^2 + x \cdot h + 1}\right)}{\frac{h}{x^2 + x \cdot h + 1}} \cdot \frac{1}{x^2 + x \cdot h + 1} \right] = 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + 1} \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Διότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{h}{x^2 + x \cdot h + 1}\right)}{\frac{h}{x^2 + x \cdot h + 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \stackrel{(Y)}{=} 2$$

$$(\Theta \text{ET}\Omega: t = \frac{h}{x^2 + x \cdot h + 1})$$

$$\text{Άρα, η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathfrak{R} \text{ με } f'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}, x \in \mathfrak{R}.$$

Δ3)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sigma\nu\nu x - \eta\mu x}{1 + \eta\mu x \cdot \sigma\nu\nu x}\right) &= \ln(\sigma\varphi x) \Leftrightarrow f\left(\frac{\sigma\nu\nu x + \eta\mu(-x)}{1 - \sigma\nu\nu x \cdot \eta\mu(-x)}\right) = \ln \frac{\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x} \stackrel{(\infty)}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow f(\sigma\nu\nu x) + f(\eta\mu(-x)) = \ln(\sigma\nu\nu x) + \ln(\eta\mu x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(\sigma\nu\nu x) + f(-\eta\mu x) = \ln(\sigma\nu\nu x) - \ln(\eta\mu x) \stackrel{f: \text{"ΠΕΡΙΤΤΗ"}}{\Leftrightarrow} \\
 &\Leftrightarrow f(\sigma\nu\nu x) - f(\eta\mu x) = \ln(\sigma\nu\nu x) - \ln(\eta\mu x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f(\sigma\nu\nu x) - \ln(\sigma\nu\nu x) = f(\eta\mu x) - \ln(\eta\mu x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow Q(\sigma\nu\nu x) = Q(\eta\mu), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

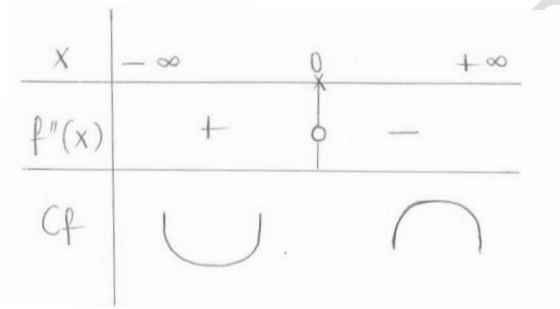
Όπου $Q(x) = f(x) - \ln x, x > 0$

$$Q'(x) = (f(x) - \ln x)' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{2x - x^2 - 1}{x \cdot (1+x^2)} = \frac{-(x-1)^2}{x \cdot (x^2+1)} \leq 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα, η $Q(\downarrow)$ στο $(0, +\infty) \Rightarrow$ η $Q: "1-1"$ στο $(0, +\infty)$ τότε από $Q(\sigma\nu\nu x) = Q(\eta\mu x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\nu\nu x = \eta\mu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta 4) f''(x) = \left(\frac{2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2 \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, x \in \mathfrak{R}$$



Η C_f στρέφει τα ΚΟΙΛΑ ΑΝΩ στο $(-\infty, 0]$ και τα ΚΟΙΛΑ ΚΑΤΩ στο $[0, +\infty)$ ενώ η αρχή $0(0,0)$ είναι ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ της.

Άρα, για κάθε $x \geq 0$ έχω:

$$f(x) \leq \varepsilon\varphi_f(x_0 = 0) \Rightarrow f(x) \leq 2x \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 2xdx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \left[x^2\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < 1$$

$$\text{Αν } x \geq 0 \stackrel{f(\uparrow)}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 0.$$

$$\text{Άρα, } 0 < \int_0^1 f(x)dx < 1.$$