

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

A2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

A3.

α) ΛΑΘΟΣ

Θεωρώ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

Προφανώς $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ αλλά αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με

$x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f ΔΕΝ μπορεί να είναι γνήσια φθίνουσα.

β)

i. ΛΑΘΟΣ

ii. ΣΩΣΤΟ

iii. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

B1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ έχω: $e^0 = c \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η C_f παρουσιάζει ελάχιστο για $x_3 = 0$, το $f(0) = 0$, άρα $\Gamma(0, 0)$

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2 \cdot (1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η C_f παρουσιάζει καμπή στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$

άρα $A(-1, \ln 2)$ και $B(1, \ln 2)$.

$$\text{Επειδή } A\Gamma = \sqrt{1^2 + \ln^2 2} = \sqrt{1 + \ln^2 2} \text{ και } B\Gamma = \sqrt{1^2 + \ln^2 2} = \sqrt{1 + \ln^2 2}.$$

Έχουμε $A\Gamma = B\Gamma$, άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

B2.

Η εφαπτομένη της Cf στο $M(1, f(1))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + f(1) - 1$$

Η εφαπτομένη της Cg στο $N(0, g(0))$ δίνεται από τον τύπο:

$$y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0) \text{ αλλά } g(0) = f(1) - 1 \text{ και } g'(0) = f'(1) = 1$$

$$\text{Άρα, } y - (f(1) - 1) = x \Leftrightarrow y = x + f(1) - 1$$

Άρα, η ευθεία $(\varepsilon): y = x + f(1) - 1$ είναι κοινή εφαπτομένη των (2) καμπυλών στα σημεία $M(1, f(1))$ και $N(0, g(0))$ αντίστοιχα.

B3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \ln(x^2 + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \cdot \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right] = 0 \cdot 2 = 0$$

Διότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x^2 + 1))'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για $x > 0$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x} \right)' = \frac{(x)' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1 - x)}{(e^x)^2} = \frac{1 - x}{e^x}$$

Άρα

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (δεκτή)}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			+	-

Για $x < 0$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή, με:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(x^2 + x)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + x) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(2x + 1) \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 + x)}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{Άρα: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Η $x = 1 - \sqrt{2}$ είναι η αποδεκτή λύση.

Συνεπώς:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	+	+	—	—

Για $x = 0$:

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - x}{e^x} = 1$$

$$\text{Άρα, η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } 0 \text{ με } f'(0) = 1. \text{ Τελικά: } f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - x}{e^x}, & x \geq 0 \\ \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	+	+	—
$f(x)$	↘	T.E.	T.M.	↘

Για $x \in [1 - \sqrt{2}, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ και για $x \in [1, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x = 1 - \sqrt{2}$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (Τ.Ε.) το

$$f(1 - \sqrt{2}) = \frac{(1 - \sqrt{2})^2 + 1 - \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 - \sqrt{2}}{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{(4 - 3\sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}{2 \cdot (2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow A(1 - \sqrt{2}, \frac{1 - \sqrt{2}}{2})$$

Στο $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (Τ.Μ.) το $f(1) = \frac{1}{e} \Rightarrow B(1, \frac{1}{3})$

Γ2.

Για $x > 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{1-x}{e^x} \right)' = \frac{(1-x)' \cdot e^x - (1-x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x - (1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$$

$$\text{Άρα: } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Συνεπώς:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$				

Για $x < 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \right)' = \frac{(-x^2 + 2x + 1)' \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 2x + 1) \cdot [(x^2 + 1)^2]'}{[(x^2 + 1)^2]^2} = \\ &= \frac{(-2x + 2) \cdot (x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' \cdot (-x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{(x^2 + 1) \cdot [(-2x + 2) \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (-x^2 + 2x + 1)]}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x + 2x^2 + 2 + 4x^3 - 8x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{2 \cdot (x^3 - 3x^2 - 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{3 \cdot (x + 1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (x + 1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Η αποδεκτή τιμή είναι η $x = -1$.

Συνεπώς:

x	$-\infty$	-1	0	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$			
x^2-4x+1	$+$	$+$	$+$			
$f''(x)$	$-$	0	$+$			

Για $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cdot (x^3 - 3x^2 - 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{e^x} = -2.$$

Άρα, δεν υπάρχει το $f''(0)$.

Τελικά:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$f(x)$					

Για $x \in [-1, 0]$ και για $x \in [2, +\infty)$ η f είναι κυρτή.

Για $x \in (-\infty, -1]$ και για $x \in [0, 2]$ η f είναι κοίλη.

Στο $x = -1$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής (Σ.Κ.) το $f(-1) = \frac{(-1)^2 + (-1)}{(-1)^2 + 1} = 0 \Rightarrow \Gamma(-1, 0)$

Στο $x = 2$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής (Σ.Κ.) το $f(2) = \frac{2}{e^2} \Rightarrow \Delta\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

Γ3.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \xrightarrow{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Άρα, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ και
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Άρα, η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της Cf στο $-\infty$.

Γ4. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2}$	0	1	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	o	+	+	-	o	+
$f'(x)$	-	-	o	+	+	o	-
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	↘	↘	↗

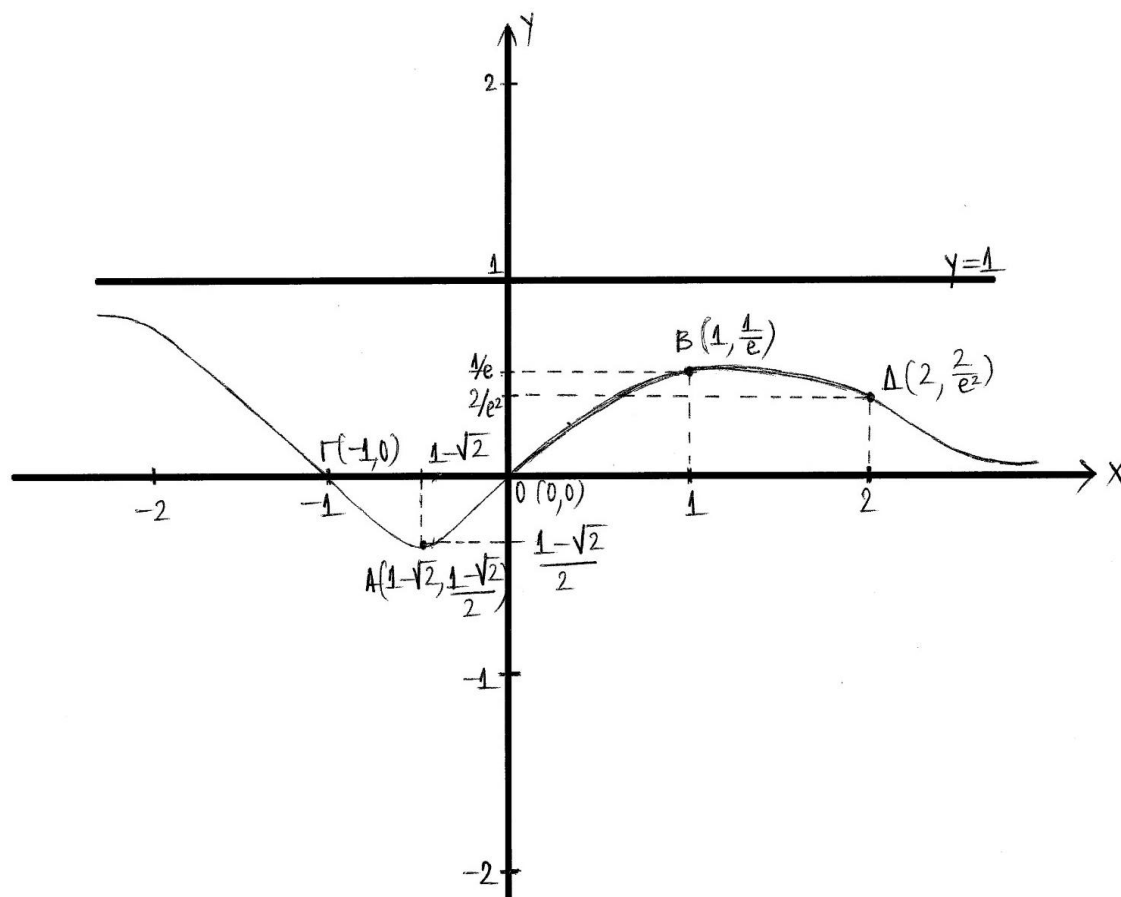
Η Cf τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x=0$: $f(0) = \frac{0}{e^0} = 0 \Rightarrow 0(0,0)$

Η Cf τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y=0$:

Για $x \geq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow 0(0,0)$

Για $x \leq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(-1,0)$

Η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω:



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{x \cdot f(t) - t \cdot f(x)}{t - x} \xrightarrow{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{t \rightarrow x} \frac{(x \cdot f(t) - t \cdot f(x))'}{(t - x)'} = \lim_{t \rightarrow x} [x \cdot f'(t) - f(x)] = x \cdot f'(x) - f(x)$$

Άρα

$$x \cdot f'(x) - f(x) = (x-1) \cdot e^x \xrightarrow{x \neq 0} \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x e^x - e^x}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(\frac{e^x}{x} \right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + c_1, x < 0 \\ \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + c_2, x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=1: f(1) = e + c_1 \Rightarrow c_1 = -\lambda \\ x=-1: -f(-1) = -e^{-1} + c_2 \Rightarrow c_2 = -\lambda \end{array} \right.$$

Άρα, $f(x) = e^x - \lambda x, x \in \mathbb{R}$

Η f είναι ΣΥΝΕΧΗΣ στο $x_0 = 0 \Leftrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \lambda x) = 1$

Συνεπώς, $f(x) = e^x - \lambda x, x \in \mathbb{R}$

Δ2.

α. $f'(x) = (e^x - \lambda x)' = e^x - \lambda, x \in \mathbb{R}$

Η f στο $x_0 = \ln \lambda$ παρουσιάζει ελάχιστο το:

$$f(\ln \lambda) = e^{\ln \lambda} - \lambda \cdot \ln \lambda = \lambda \cdot (1 - \ln \lambda)$$

x	$-\infty$	$\ln \lambda$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned} \beta. \quad e^x \geq \lambda x &\Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot (1 - \ln \lambda) \geq 0 \xrightarrow{\lambda > 0} 1 - \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln \lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda \leq e \end{aligned}$$

Άρα, $\lambda_{\max} = e$.

Δ3.

α. $f''(x) = (e^x - \lambda)' \Rightarrow f''(x) = e^x > 0, x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \left[\frac{1}{4} f(2x^2 - 1) + \frac{1}{2} f(1 - x^2) \right]' = x \cdot [f'(2x^2 - 1) - f'(1 - x^2)], x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(2x^2 - 1) = f'(1 - x^2) \xrightarrow{f':1-1} 2x^2 - 1 = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \end{cases}$$

Αν $x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, έχω:

$$3x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 < 1 - x^2 \xrightarrow{f'(\uparrow)} f'(2x^2 - 1) < f'(1 - x^2) \Leftrightarrow f'(2x^2 - 1) - f'(1 - x^2) < 0$$

Όμοια, για $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$ έχω: $f'(2x^2 - 1) - f'(1 - x^2) > 0$

Άρα:

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$f'(2x^2-1) - f'(1-x^2)$	+	0	-	-	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\min$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$

Όπου $g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)$ και $g(0) = \frac{1}{4}f(-1) + \frac{1}{2}f(1)$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχω:

$$4g(x) + 1 = 3\sqrt[3]{e} \Leftrightarrow 4g(x) = 3 \cdot e^{\frac{1}{3}} - 1 \Leftrightarrow 4g(x) = 3\left(e^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 4g(x) = 3 \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow g(x) = g_{\min}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού