

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(x) = (c)' = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(7 Μονάδες)

A2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο x_0 ;

(4 Μονάδες)

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ »

i) Να γράψετε αν η πρόταση είναι Αληθής ή Ψευδής

(1 Μονάδες)

ii) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας,

(3 Μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (**Σ**) ή λανθασμένες (**Λ**):

i) Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

ii) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

iii) Αν $\alpha \in (0,1)$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

iv) Αν $f'(x_0) > 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού A_f της f , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό.

v) Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει: $f'(x) > g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x} + e^{x-1} - 2, x \geq 0 \text{ και } g(x) = f^2(x) \cdot (x-3)^2, x \geq 0$$

B1. Ναδειχθεί ότι η γραφική C_f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y + x = 0$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $A(x_0, y_0)$ με το $x_0 \in (0,1)$.

(5 Μονάδες)

B2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

(5 Μονάδες)

B3. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης C_f της f και των ευθειών: $x = 0, y = 0, x = 1$

(8 Μονάδες)

- B4.** Να δειχθεί ότι η g έχει δύο (2) θέσεις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ στις οποίες εμφανίζει ελάχιστο και στη συνέχεια για $x \in [x_1, x_2]$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 , με $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε η g να παρουσιάζει μέγιστο.

(4+3 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** i) Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(x+8) \geq x+1$
(5 Μονάδες)

- ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = 1$
(4 Μονάδες)

- Γ2.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $\mathbb{R}$ η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

(3 Μονάδες)

- ii) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*, \alpha \neq \beta$ και ισχύει: $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\beta - \alpha}$ να δειχθεί ότι: $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$.

- Γ3.** Να δειχθεί ότι ισχύει: $\int_0^1 f''(x) \eta\mu(\pi x) dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = 0$.

(5 Μονάδες)

- Γ4.** Να δειχθεί ότι: $f\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) > (x+1)^3 + x$, για κάθε $x > 0$.

(4 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση F αρχική της $f(x) = e^{x^2}$ στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$:

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η F είναι περιττή.

(4 Μονάδες)

- Δ2.** Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα.

(4 Μονάδες)

- Δ3.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

(4 Μονάδες)

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει: $F(x) \leq e^x - 1$

(4 Μονάδες)

- Δ5.** Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 F(x) dx < e - 2$

(4 Μονάδες)

- Δ6.** Να αποδείξετε ότι: $1 < F(1) < \frac{3e-5}{2}$

(5 Μονάδες)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 105.

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 157.

A3. i) Ψευδής

ii) Το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$. Οπότε μπορεί το ολοκλήρωμα να είναι μηδέν, χωρίς όμως η συνάρτηση να είναι μηδενική στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

A4.

i) Σωστό.

ii) Σωστό.

iii) Λάθος.

iv) Λάθος.

v) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση $x_0 \in (0,1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ για $x \in [0,1]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης $h(0) = f(0) = e^{-1} - 2 = \frac{2-e}{2} < 0$ και $h(1) = f(1) + 1 = 1 > 0$

Άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -x_0$ που είναι και το ζητούμενο.

B2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x \geq 0$ και παραγωγίσιμη για $x > 0$ με

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{x-1}.$$

Αφού $f'(x) > 0$ για $x > 0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και το σύνολο

τιμών της είναι: $f([0, +\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ με

$$f(0) = e^{-1} - 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Άρα } f(A) = [e^{-1}, +\infty)$$

B3. Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου της συνεχούς συνάρτησης f δίνεται από το ολοκλήρωμα: $E = \int_0^1 |f(x)|dx$.

Αφού f γνησίως αύξουσα και $f(1) = 0$ τότε για $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 (-f(x))dx = - \left[\frac{x^2}{\frac{3}{2}} + e^{x-1} - 2x \right]_0^1 =$$

$$= - \left(\frac{2}{3} + 1 - 2 \right) + \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{e} = \frac{e+3}{3e} \text{ τ.μ.}$$

- B4.** Για τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x) \cdot (x - 3)^2$, $x \geq 0$ έχουμε ότι $g(x) \geq 0$ ως γινόμενο μη αρνητικών και προφανώς $g(1) = 0$ και $g(3) = 0$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$.

Θεωρώντας τη συνάρτηση g στο διάστημα $[1,3]$ ξέρουμε από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής (ΘΜΕΤ) ότι ως συνεχής σε κλειστό διάστημα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Αφού τα άκρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$ είναι σημεία ελαχίστου τότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον x_o , με $x_o \in (1,3)$ ώστε η g να παρουσιάζει μέγιστο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- i) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = (x^3 + x - 1)' = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, "1-1" και αντιστρέψιμη.
Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την ανίσωση έχουμε:
 $f^{-1}(x+8) \geq x+1 \Rightarrow f(f^{-1}(x+8)) \geq f(x+1) \Rightarrow x+8 \geq (x+1)^3 + (x+1) - 1$
 $\Rightarrow 8 \geq (x+1)^3 \Rightarrow x+1 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$. Άρα $x \in (-\infty, 1]$

- ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 - x^2 + x$ με $x \in \mathbb{R}$
Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη για $x \in \mathbb{R}$ με $g'(x) = (x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = -8$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και "1-1" στο $\mathbb{R}$.
Η εξίσωση: $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = 1$ γράφεται: $g(f(x)) = 1 \xLeftrightarrow{g(1)=1} g(f(x)) = g(1)$
 $\xLeftrightarrow{g:1-1} f(x) = 1 \xLeftrightarrow{f(1)=1} f(x) = f(1) \xLeftrightarrow{f:1-1} x = 1$.

Γ2.

- i) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 1 > 0$. Άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$ και από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o) = 0$. Όμως η f είναι "1-1" και επομένως η ρίζα $x_o \in (0,1)$ είναι μοναδική.
- ii) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε: $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} \Rightarrow (\beta - \alpha)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha\beta^2 \Rightarrow$
 $\beta^3 - \alpha^3 = \alpha\beta^2 \xRightarrow{\beta^3} 1 - \frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow 1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 + \frac{\alpha}{\beta} - 1 = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \xRightarrow{i} \frac{\alpha}{\beta} \in (0,1) \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, που είναι το ζητούμενο.

- Γ3.** Από το πρώτο μέλος της σχέσης έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f''(x) \eta\mu(\pi x) dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \\ &= \int_0^1 (f')'(x) \eta\mu(\pi x) dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \\ &= [f'(x) \eta\mu(\pi x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) (\eta\mu(\pi x))' dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \\ &= 0 - \int_0^1 f'(x) \sigma\upsilon\nu(\pi x) \pi dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \\ &= -\pi \int_0^1 f'(x) \sigma\upsilon\nu(\pi x) dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \\ &= -\pi \left([f(x) \sigma\upsilon\nu(\pi x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) (\sigma\upsilon\nu(\pi x))' dx \right) + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x) \eta\mu(\pi x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\pi[f(x)\sin(\pi x)]_0^1 + \pi \int_0^1 f(x)(-\eta\mu(\pi x)\pi)dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x)\eta\mu(\pi x)dx = \\
&= -\pi[f(x)\sin(\pi x)]_0^1 - \pi^2 \int_0^1 f(x)\eta\mu(\pi x)dx + \pi^2 \cdot \int_0^1 f(x)\eta\mu(\pi x)dx = \\
&= -\pi(f(1)\sin(\pi) - f(0)\sin(0)) = -\pi(-1 + 1) = 0, \text{ που είναι το ζητούμενο.}
\end{aligned}$$

Γ4. Από την ανίσωση έχουμε:

$$f\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) > (x+1)^3 + x \Leftrightarrow f\left(e^x - \frac{x^2}{2}\right) > f(x+1) \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} e^x - \frac{x^2}{2} > x+1 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $Q(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$ με $x \in [0, +\infty)$

Η Q παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με

$$Q'(x) = \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right)' = e^x - x - 1 > 0, \text{ αφού } e^x > x+1 \text{ για } x > 0.$$

Άρα η Q γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και για $x > 0$ έχουμε:

$$x > 0 \Leftrightarrow Q(x) > Q(0) \Leftrightarrow Q(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0, \text{ που είναι το ζητούμενο.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού F αρχική της f , τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = e^{x^2}$

$$\text{Θέτουμε όπου } x \text{ το } -x \text{ και προκύπτει: } F'(-x) = e^{x^2} \Leftrightarrow -F'(-x) = -e^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (F(-x))' = (-F(x))' \Leftrightarrow F(-x) = -F(x) + c$$

Για $x = 0$ προκύπτει ότι $c = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $F(-x) = -F(x)$ και η F περιττή.

Δ2. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $F'(x) = e^{x^2}$ και $F''(x) = 2xe^{x^2}$

Άρα $F''(x) > 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και F κυρτή στο $[0, +\infty)$ ενώ

$$F''(x) < 0 \Leftrightarrow 2xe^{x^2} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και } F \text{ κοίλη στο } (-\infty, 0]$$

Δ3. Ισχύει ότι $F(0) = 0$ και $F'(0) = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_F της F στο σημείο καμπής $A(0,0)$ είναι η $\varepsilon: y = x$

Για $x \in [0, +\infty)$ η F είναι κυρτή και επομένως $F(x) \geq x$ για $x \geq 0$.

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ άρα θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = F(x) - e^x + 1$ με $x \in [0,1]$, η οποία είναι παραγωγίσιμη για $x \in (0,1)$ με $h'(x) = e^{x^2} - e^x$.

$$\text{Για } 0 < x < 1 \text{ ισχύει } x^2 < x \Leftrightarrow e^{x^2} < e^x \Leftrightarrow e^{x^2} - e^x < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0.$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και έχουμε για

$$x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow F(x) - e^x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow F(x) \leq e^x - 1, \text{ που είναι το ζητούμενο.}$$

Δ5. Από τη σχέση του Δ4 προκύπτει ότι: $\int_0^1 F(x)dx < \int_0^1 (e^x - 1)dx$, αφού η F δεν είναι συνεχώς ίση με την $e^x - 1$. Είναι $\int_0^1 (e^x - 1)dx = [e^x - x]_0^1 = (e - 1) - 1 = e - 2$ και επομένως $\int_0^1 F(x)dx < e - 2$

Δ6. Από Δ3, $F(x) \geq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $F(1) > 1$

$$\text{Επίσης έχουμε: } \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xe^{x^2}dx =$$

$$= F(1) - \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = F(1) - \frac{e-1}{2}$$

Άρα από την ανισότητα του Δ5, προκύπτει:

$$F(1) - \frac{e-1}{2} < e - 2 \Leftrightarrow 2F(1) - e + 1 < 2e - 4 \Leftrightarrow 2F(1) < 3e - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(1) < \frac{3e-5}{2} \text{ και τελικά } 1 < F(1) < \frac{3e-5}{2}.$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΔΡΑΚΟΣ