

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2018
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται παραγωγίσιμη στο $[α, β]$;
(5 Μονάδες)
- A2.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο Δ και $x_0 \in \Delta$. Να δειχθεί ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f είναι και συνεχής στο x_0 .
(10 Μονάδες)
- A3.** Να χαρακτηριστούν **σωστό (Σ)** ή **λάθος (Λ)** οι ακόλουθες προτάσεις:
- α.** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $(\varepsilon): y = x$
- β.** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$
- γ.** Τα κρίσιμα σημεία της f σ' ένα διάστημα Δ είναι τα σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η παράγωγός της δεν ορίζεται.
- δ.** Αν F μια αρχική της f στο διάστημα Δ τότε ισχύει: $F'(x) = f(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta, c \in \mathbb{R}$.
- ε.** Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει πάντα το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x < 0 \\ \eta\mu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο $A(0, f(0))$.
(8 Μονάδες)
- B2.** Αν η παραπάνω εφαπτομένη είναι η $(\varepsilon): y = x + 1$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την (ε) και την ευθεία $x = -1$.
(8 Μονάδες)
- B3.** Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0, \pi]$ και να αποδείξετε ότι: $\int_1^{\sqrt{2}} f(x)dx < \sqrt{2} - \frac{1}{2}$
(9 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ώστε:

- Η γραφική της παράσταση (C_f) να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1
- Η f να έχει μέγιστο στο $x_0 = e$ και
- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $x^2 f'(x) = 1 - \ln x + \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$ (1)

Γ1. Να βρεθεί η σταθερά κ και να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, για $x > 0$

(5 Μονάδες)

Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

(5 Μονάδες)

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες τις C_f .

(5 Μονάδες)

Γ4. Να σχεδιάσετε τη C_f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $\ln x - \alpha \cdot x = 0$, για κάθε αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5 Μονάδες)

Γ5. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x 2f(x)dx \right)$ και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

(5 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left[h^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{h} \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{h}\right) - f(x) \right) \right] = e^{x^2}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(4 Μονάδες)

Δ2. Να δειχθεί ότι: $f(0) < f(1) < 1 + \int_0^1 f(x)dx$.

(5 Μονάδες)

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x^4) - f\left(\frac{x^2}{4}\right) = x^8 - \frac{x^4}{16}$.

(5 Μονάδες)

Δ4. Να δειχθεί ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = +\infty$.

(5 Μονάδες)

Δ5. Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ και στη συνέχεια

να δειχθεί ότι η εξίσωση: $\frac{f(x) - f(2x)}{1-x} + \frac{\int_0^1 f(x)dx - f(0)}{x} = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

(6 Μονάδες)

Καλά Αποτελέσματα!
Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού