

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2018
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Ορισμός σχολικού βιβλίου.
A2. Απόδειξη σχολικού βιβλίου.
A3. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Για $x < 0$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\eta\mu x + 1)' = \sigma\upsilon\nu x$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1-x-1+x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-2+x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2+x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1 \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ και επομένως f παραγωγίσιμη και στο $x = 0$ με παράγωγο $f'(0) = 1$

Τελικά f παραγωγίσιμη στο $A_f = \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$

Η εφαπτομένη στο $A(0, f(0))$ είναι: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$.

B2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση έχει μοναδικό κοινό σημείο με την εφαπτομένη $y = x + 1$, το σημείο επαφής $A(0,1)$, αφού:

$$\text{Για } x < 0, f(x) = x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = x + 1 \Leftrightarrow 1 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται}$$

$$\text{Για } x \geq 0, f(x) = x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ μοναδική}$$

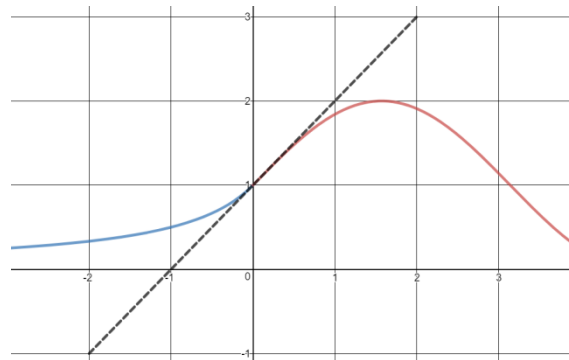
Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο: $E(\Omega) = \int_{-1}^0 |f(x) - (x + 1)| dx$

Όμως για $x < 0$, $f(x) > x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} > x + 1 \xrightarrow{(1-x>0)} 1 > 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 > 0$ που ισχύει.

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \int_{-1}^0 (f(x) - (x + 1)) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{1-x} - x - 1 \right) dx = \left[-\ln(1-x) - \frac{x^2}{2} - x \right]_{-1}^0 =$$

$$= (-\ln 1) - \left(-\ln(2) - \frac{1}{2} + 1 \right) = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$



B3. Για $x > 0$, $f(x) = \eta\mu x + 1$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = -\eta\mu x$.

Άρα στο $(0, \pi)$, $f''(x) = -\eta\mu x < 0$ και επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και κοίλη στο $[0, \pi]$

Επομένως η γραφική παράσταση της f θα είναι κάτω από την εφαπτομένη της σε όλο το διάστημα $[0, \pi]$, εκτός από το σημείο επαφής $A(0, f(0))$, δηλαδή $f(x) \leq x + 1$, στο $[0, \pi]$, άρα και στο $[1, \sqrt{2}] \subseteq [0, \pi]$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει: $\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx < \int_1^{\sqrt{2}} (x + 1) dx$,

$$\text{Με } \int_1^{\sqrt{2}} (x + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{2} + \sqrt{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx < \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, που είναι και το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = e$ του πεδίου ορισμού της. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει $f'(e) = 0$.

Από τη σχέση (1) θέτωντας $x = e$ προκύπτει: $e^2 f'(e) = 1 - \ln e + \kappa \Leftrightarrow 0 = 1 - 1 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 0$.

Επομένως η (1) γράφεται:

$$x^2 f'(x) = 1 - \ln x \xrightarrow{x>0} f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)'$$

Και από συνέπειες του Θ.Μ.Τ. θα είναι: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$

Αφού η γραφική παράσταση (C_f) της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 1, τότε:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln 1}{1} + c = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ και τελικά } f(x) = \frac{\ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$
- $f'(x) > 0 \xrightarrow{x>0} 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \xrightarrow{\ln x \nearrow} 0 < x < e$
- $f'(x) < 0 \xrightarrow{x>0} 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow \ln x > \ln e \xrightarrow{\ln x \nearrow} x > e$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$ και έχει μέγιστο για $x = e$ το

$$f(e) = \frac{1}{e}.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1-\ln x)'x^2 - (x^2)'(1-\ln x)}{(x^2)^2} = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(2\ln x - 3)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$
- $f''(x) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2\ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$
- $f''(x) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2\ln x < 3 \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{3}{2}}$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(0, e^{\frac{3}{2}}]$, κυρτή στο $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $B\left(e^{\frac{3}{2}}, f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)$, όπου

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$$

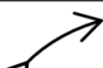
Γ3. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\infty. \text{ Άρα } x = 0 \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

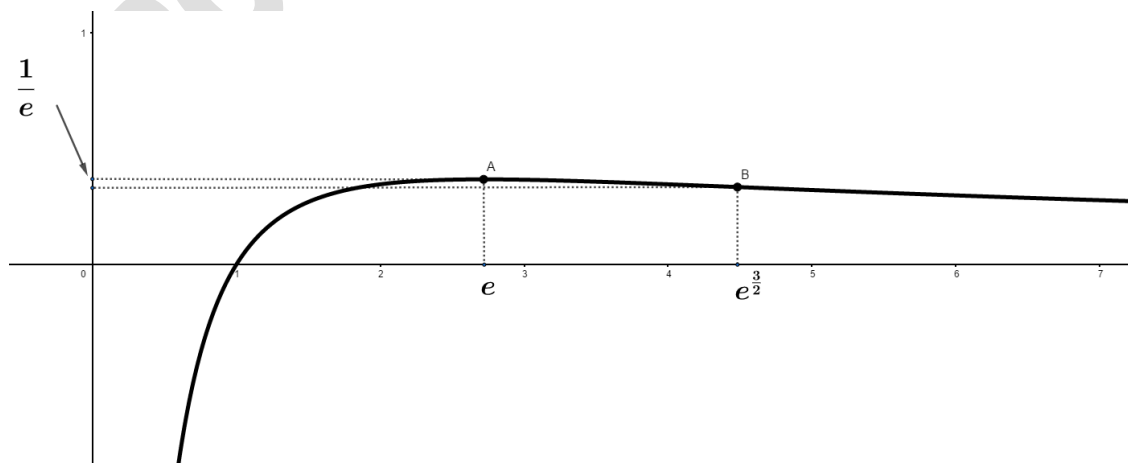
και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \text{ Άρα } y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

Γ4. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0				e	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		-			-	0	+
f'		+		0	-		-
f							

Η γραφική παράσταση της f είναι:



Η εξίσωση γράφεται: $\ln x - \alpha \cdot x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \alpha \cdot x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln x}{x} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) αν $\alpha \leq 0$ τότε έχουμε μία (1) ρίζα

ii) αν $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ τότε έχουμε δύο (2) ρίζες

iii) αν $\alpha = \frac{1}{e}$ τότε έχουμε μία (1) ρίζα

iv) αν $\alpha > \frac{1}{e}$ τότε δεν έχουμε ρίζα

Γ5. Το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_e^{\kappa} 2f(x)dx = \int_e^{\kappa} 2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{\kappa} 2 \frac{1}{x} \ln x dx = \int_e^{\kappa} 2(\ln x)' \ln x dx = [\ln^2 x]_e^{\kappa} = \ln^2 \kappa - 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_e^x 2f(x)dx \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln^2 x - 1) = +\infty$$

Επειδή για $x \geq e$ είναι $f(x) > 0$, το παραπάνω όριο είναι το όριο του εμβαδού που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και του άξονα $x'x$ (που είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$) από την $x = e$ έως και το $+\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτοντας $t = \frac{1}{h}$ στο όριο έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left[h^2 \cdot \eta \mu \frac{1}{h} \cdot \left(f\left(x + \frac{1}{h}\right) - f(x) \right) \right] = e^{x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\eta \mu t}{t} \cdot \frac{f(x+t) - f(x)}{h} \right] = e^{x^2} \Rightarrow 1 \cdot f'(x) = e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Δ2. Είναι: } f'(x) = e^{x^2} \Rightarrow 2xf'(x) = 2xe^{x^2} \Rightarrow \int_0^1 2xf'(x)dx = \int_0^1 2xe^{x^2}dx \Rightarrow$$

$$[2xf(x)]_0^1 - \int_0^1 (2x)'f(x)dx = [e^{x^2}]_0^1 \Rightarrow 2f(1) - \int_0^1 2f(x)dx = e - 1$$

$$\text{Άρα } 2f(1) - 2 \int_0^1 f(x)dx < 2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(1) - \int_0^1 f(x)dx < 1 \Rightarrow f(1) < 1 + \int_0^1 f(x)dx \quad (1)$$

Επίσης $f'(x) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

και επομένως $0 < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(1)$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει: $f(0) < f(1) < 1 + \int_0^1 f(x)dx$

Δ3. Θεωρούμε την $G(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Η G παραγωγίσιμη με $G'(x) = f'(x) - 2x \Rightarrow G'(x) = e^{x^2} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^{x^2} \geq x^2 + 1 \geq 2x \Rightarrow e^{x^2} \geq 2x \Rightarrow e^{x^2} - 2x \geq 0 \Rightarrow G'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η G γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\text{Τότε: } f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f\left(\frac{x^2}{4}\right) = x^8 - \frac{x^4}{16} \Leftrightarrow f(x^4) - x^8 = f\left(\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^4}{16} \Leftrightarrow G(x^4) = G\left(\frac{x^2}{4}\right) \stackrel{G:1-1}{\Leftrightarrow} x^4 = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$4x^4 = x^2 \Leftrightarrow x^2(4x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

Δ4. Θεωρούμε $f(t), t \in [x, 2x]$

Η f συνεχής στο $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 2x)$.

Από ΘΜΤ, υπάρχει $t_o \in (x, 2x): f'(t_o) = \frac{f(2x)-f(x)}{2x-x} \Rightarrow f'(t_o) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$

Είναι $t_o > x \xRightarrow{f' \nearrow} f'(t_o) > f'(x) \Rightarrow \frac{f(2x)-f(x)}{x} > e^{x^2}$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$

Άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = +\infty$

Δ5. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$ δίνεται από τον τύπο:

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \xRightarrow{f'(0)=1} y = x + f(0)$$

Θεωρούμε συνάρτηση: $D(x) = x(f(x) - f(2x)) + (1-x) \left(\int_0^1 f(x) dx - f(0) \right), x \in [0,1]$.

Η D συνεχής στο $[0,1]$ με:

$$D(0) = \int_0^1 f(x) dx - f(0) \text{ και } D(1) = f(1) - f(2)$$

Όμως: $1 < 2 \xRightarrow{f' \nearrow} f(1) < f(2) \Rightarrow f(1) - f(2) < 0 \Rightarrow D(1) < 0$.

Επίσης η f η κυρτή στο $[0, +\infty]$. Άρα $f(x) \geq x - f(0)$ για $x \in [0, +\infty]$ και επομένως

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (x + f(0)) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 x dx + \int_0^1 f(0) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2} + f(0) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx - f(0) > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow D(0) > 0$$

Τελικά $D(0) \cdot D(1) < 0$ και από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$D(x_o) = 0 \xRightarrow{x_o \neq 0 \text{ και } 1} \frac{f(x_o)-f(2x_o)}{1-x_o} + \frac{\int_0^1 f(x) dx - f(0)}{x_o} = 0$. Δηλαδή η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

**Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού**