

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2017
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f η οποία έχει πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ;

Μονάδες 5

A2. Να διατυπωθεί το θεώρημα FERMAT και να αποδειχθεί.

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$.

γ) Η συνάρτηση $f: y = f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = -1$ με $f(-1) > g(-1)$ τότε ισχύει $f'(-1) > g'(-1)$.

ε) Αν η f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0\}$ τότε ισχύει:

$$(f(0))' = 0.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β.

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = g(0)$
- $f(1) = g(1) + 1$
- $f''(x) = g''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο (2) ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < 0 < x_2$.

B1. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = g(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

B2. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία (1) τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

Μονάδες 7

B3. Ναδειχθεί ότι: $\int_{x_1}^{x_2} x \cdot g'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x - f(x)) dx$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$H: y = H(x) = x^2 \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$f: y = f(x) = \frac{1}{1 + H(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

καθώς και τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^1 H(x) dx, \quad B = \int_0^1 f(x) dx$$

Γ1. Ναδειχθεί ότι: $0 \leq x^2 e^{-x} \leq \frac{1}{e}, \quad \forall x \in [0, 1]$.

Μονάδες 5

Γ2. Ναδειχθεί ότι: $A = 2 - \frac{5}{e}$.

Μονάδες 6

Γ3. Ναδειχθεί ότι: $1 - y \leq \frac{1}{1 + y} \leq 1 - \frac{y}{2}, \quad \forall y \in [0, 1]$.

Μονάδες 7

Γ4. Ναδειχθεί ότι: $\frac{5 - e}{e} \leq B \leq \frac{5}{e}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 12

Δ2. Ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f^{-1}(x) = x^3 + 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

Δ3. Ναδειχθεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ4. Ναβρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .

Μονάδες 4

Δ5. Ναβρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f του άξονα των x και της ευθείας $(\varepsilon): x = 3$.

Μονάδες 4

Καλά Αποτελέσματα!

Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού