

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

A2. Βλέπε σχολικό βιβλίο.

A3. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

B1. Από (Y) έχω: $f''(x) = g''(x) \Rightarrow (f'(x))' = (g'(x))' \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x) + \alpha \Rightarrow f'(x) = (g(x) + \alpha x)' \Rightarrow f(x) = g(x) + \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Η σχέση αυτή για $x=0$ και $x=1$ δίνει αντίστοιχα:

$$f(0) = g(0) + a \cdot 0 + \beta \xrightarrow{(Y)} \beta = 0$$

$$f(1) = g(1) + a \cdot 1 + \beta \xrightarrow{(Y)} g(1) + 1 = g(1) + a \Rightarrow a = 1$$

Άρα: $f(x) = g(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}$

B2. Η f συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$f(x_1) = g(x_1) + x_1 = x_1 < 0$$

$$f(x_2) = g(x_2) + x_2 = x_2 > 0$$

(Bolzano): Υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2): f(x_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία (1) τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

$$B3. \int_{x_1}^{x_2} x g'(x) dx = (x g(x))_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} (x)' \cdot g(x) dx = (x \cdot g(x))_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx =$$

$$x_2 g(x_2) - x_1 g(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x - f(x)) dx$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Θεωρώ $Q: y = Q(x) = x^2 \cdot e^{-x}, x \in [0,1]$

$$Q'(x) = (x^2 \cdot e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}, x \in (0,1)$$

Άρα: $Q'(x) > 0, \forall x \in (0,1) \Rightarrow Q(\uparrow)$ στο $[0,1]$

$$x \in [0,1]: 0 \leq x \leq 1 \stackrel{Q(\uparrow)}{\Rightarrow} Q(0) \leq Q(x) \leq Q(1) \Rightarrow$$

$$0 \leq x^2 \cdot e^{-x} \leq \frac{1}{e}, \forall x \in [0,1].$$

Γ2.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (x^2 e^{-x}) dx = - \int_0^1 x^2 (e^{-x})' dx = - (x^2 \cdot e^{-x})_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x} dx = -e^{-1} - 2 \int_0^1 x (e^{-x})' dx = \\ &= -\frac{1}{e} - 2(xe^{-x})_0^1 + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - 2e^{-1} - 2(e^{-x})_0^1 = -\frac{1}{e} - 2e^{-1} - 2(e^{-1} - 1) = \\ &= -\frac{3}{e} - \frac{2}{e} + 2 \Rightarrow A = 2 - \frac{5}{e}. \end{aligned}$$

Γ3. $1 - y \leq \frac{1}{1+y} \leq 1 - \frac{y}{2} \stackrel{(1+y)}{\Rightarrow} 1 - y^2 \leq 1 \leq \frac{2-y}{2}(1+y)$ η οποία ισχύει διότι:

$$\bullet y \in [0,1] \Rightarrow y^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - y^2 \leq 1$$

$$\bullet 1 \leq \frac{(2-y)(1+y)}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{-y^2 + y + 2}{2} \Leftrightarrow -y^2 + y + 2 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -y^2 + y \geq 0 \Leftrightarrow y(1-y) \geq 0 \text{ το οποίο είναι προφανές διότι } y \in [0,1].$$

Γ4. Από το Γ1 έχω:

$$0 \leq x^2 \cdot e^{-x} \leq \frac{1}{e}, \forall x \in [0,1].$$

$$\text{Άρα: } x^2 \cdot e^{-x} \in \left[0, \frac{1}{e}\right] \subseteq [0,1]$$

Τότε στην ανίσωση: $1 - y \leq \frac{1}{1+y} \leq 1 - \frac{y}{2}$ για $y = x^2 \cdot e^{-x}$ έχω:

$$1 - x^2 e^{-x} \leq \frac{1}{1 + x^2 e^{-x}} \leq 1 - \frac{x^2 e^{-x}}{2} \Rightarrow 1 - x^2 e^{-x} \leq f(x) \leq 1 - \frac{x^2 e^{-x}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1 - x^2 e^{-x}) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (1 - \frac{x^2 e^{-x}}{2}) dx \Rightarrow \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \leq B \leq \int_0^1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x)_0^1 - A \leq B \leq (x)_0^1 - \frac{1}{2} A \Rightarrow 1 - \left(2 - \frac{5}{e}\right) \leq B \leq 1 - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{5}{e}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{e} - 1 \leq B \leq \frac{5}{e} \Rightarrow \frac{5-e}{e} \leq B \leq \frac{5}{e}$$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ (τυχαίο σημείο)

Για ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξω ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Από (Υ) έχω: $f^3(x) + 2f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = x_0$: $f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0$

Άρα $f^3(x) + 2f(x) - f^3(x_0) - 2f(x_0) = x - x_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f^3(x) - f^3(x_0)) + 2(f(x) - f(x_0)) = x - x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - f(x_0)) [f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2] = x - x_0 \Leftrightarrow$$

(Η παράσταση: $f(x) + f(x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0) + 2 > 1$)

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \Leftrightarrow$$

Άρα:

$$\Leftrightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{x - x_0}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \right| \leq |x - x_0|$$

τότε:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq |x - x_0|$$

Από κριτήριο παρεμβολής έχω: $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^3(x_1) = f^3(x_2) \\ 2f(x_1) = 2f(x_2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} f^3(x_1) + 2f(x_1) = f^3(x_2) + 2f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η f είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$

Άρα η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}$.

Από υπόθεση έχω: $f^3(x) + 2f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

και η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, θέτοντας στη σχέση αυτή όπου x το $f^{-1}(x)$

έχουμε: $(f(f^{-1}(x)))^3 + 2f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Θεωρώ: $g: y=g(x)=x^3+2x, x \in \mathbb{R}$

Επειδή $g'(x) = (x^3+2x)' = 3x^2+2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow H \ g(\uparrow)$ στο $\mathbb{R}$.

Από υπόθεση: $f^3(x)+2f(x)=x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(f(x))=x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow H \ (g \circ f)$ είναι ΠΡΟΦΑΝΩΣ γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2) \Rightarrow gf(x_1) < gf(x_2) \xRightarrow{(g \uparrow)} f(x_1) < f(x_2)$
 $\Rightarrow H \ f(\uparrow)$ στο $\mathbb{R}$.

Δ4. $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3+2x = x \Leftrightarrow x^3+x = 0 \Leftrightarrow$

$$x(x^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ή} \\ x^2=-1 \text{ (ΑΔΥΝΑΤΗ)} \end{cases}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, την αρχή $O(0,0)$.

Δ5. $x > 0 \xRightarrow{f(\uparrow)} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$ τότε:

$$E(\Omega) = \int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^3 f(x) dx$$

Θέτω: $f(x)=h \Rightarrow x = f^{-1}(h) \Rightarrow x = h^3+2h \Rightarrow d(x) = d(h^3+2h) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x)'dx = (h^3+2h)'dh \Rightarrow dx = (3h^2+2)dh$
 $\begin{cases} x=3 \Rightarrow h = f(3) \Rightarrow f^{-1}(h) = 3 \Rightarrow h^3+2h = 3 \Rightarrow h=1 \\ x=0 \Rightarrow h = f(0) \Rightarrow h=0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } E(\Omega) &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 h(3h^2+2) dh = \int_0^1 (3h^3+2h) dh = \\ &= 3 \int_0^1 h^3 dh + 2 \int_0^1 h dh = \frac{3}{4} (h^4)_0^1 + (h^2)_0^1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \tau.μ. \end{aligned}$$

Καλά Αποτελέσματα!

Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού