

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Να διατυπωθεί το Θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

A2. Ναδειχθεί ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη σ' ένα διάστημα Δ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

A3. Να χαρακτηριστούν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) οι παρακάτω προτάσεις:

α) Έστω f ορισμένη στο R τότε ισχύει ότι $(f(0))' = 0$

β) Αν f συνεχής στο R με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx > 0$, $a, \beta \in R$

γ) Αν η f είναι γνήσια μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε η f είναι και "1-1" σ' αυτό.

δ) Έστω f παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Αν ισχύει: $f'(x) > 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της τότε η f είναι γνήσια αύξουσα.

25 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β.

B1. Να βρεθούν τα $a, \beta \in R$ ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax - 3) = 2\beta - 1$

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \neq 1$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω των σημείων $M(x, y)$ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει:

$$2 \leq x \leq 4$$

$$0 \leq y \leq f(x)$$

25 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ.

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-2,1)$ και $B(1,7)$.

Γ1. Ναδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Ναλυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση: $f^{-1}(-6 + f(x^2 - 8)) = -2$

Γ3. Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία της είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x + 2y - 3 = 0$

25 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ.

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Oy
- $F(1) = 0$, όπου F είναι μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Ναβρεθούν οι ρίζες και ναμελετηθεί ως προς το πρόσημο η

$$g(x) = \frac{F(x)}{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $a \in (1,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\frac{F(a)}{f(a) \cdot (2-a)} = 1 - \frac{f'(a) \cdot F(a)}{f^2(a)}$$

Δ3. Ναδειχθεί ότι: $f(x) + F(x) \geq xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι

$$2 \int_0^1 xf(x) dx < \int_0^1 f(x) dx$$

Δ4. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $(\varepsilon): \frac{f(0) - 2 \int_0^1 xf(x) dx}{1-x} = \frac{f(x)}{x}$ έχει (1) τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

25 Μονάδες

Καλά Αποτελέσματα!

Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού