

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΜΑ Α.

A1. Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - a}$

Η εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για μία συνάρτηση σ' ένα διάστημα αποδεικνύει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον εσωτερικού σημείου του διαστήματος, στο οποίο η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης είναι παράλληλη της χορδής που ενώνει τα άκρα της καμπύλης στο διάστημα αυτό.

A2. Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ . Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$ ($\alpha < \beta$) έτσι ώστε να ισχύει: $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$

Άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Άτοπο διότι από υπόθεση η f είναι μη μηδενιζόμενη στο Δ . Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

A3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β.

$$\mathbf{B1.} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax - 3) = 2\beta - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax - 3 - 2\beta + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax - 2\beta - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (-ax + 2(\beta + 1))) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ η ε : $y = -ax + 2(\beta + 1)$ είναι ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ της C_f με τύπο

$f(x) = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$ στην περιοχή του $(-\infty)$

$$\mathbf{\underline{\text{Άρα}}} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -a & \text{i)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + ax] = 2(\beta + 1) & \text{ii)} \end{cases}$$

$$i) -a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = -2 \Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$ii) 2(\beta + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}^2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 1}{|x| \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{-x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2} = \frac{-3}{-2 - 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2(\beta + 1) = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta + 1 = \frac{3}{8} \Rightarrow \beta = \frac{3}{8} - 1 \Rightarrow \beta = -\frac{5}{8}$$

B2.

$$a) f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}, x \neq 1$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x	-	$\circ$	+	+	+
$x-2$	-	-	-	$\circ$	+
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
f		$[0]$	$(+\infty)$		$(+\infty)$

$(-\infty) \nearrow \quad \searrow (-\infty) \quad \nearrow [4] \quad \searrow (+\infty)$

Η f είναι ($\uparrow$) στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$

Η f είναι ($\downarrow$) στα $[0, 1)$, $(1, 2]$

$$b) x = 0 \quad f_{\max}(0) = 0$$

$$x = 2 \quad f_{\min}(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} \stackrel{(\frac{1}{0^-})}{=} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} \stackrel{(\frac{1}{0^+})}{=} +\infty$$

$$\text{Άρα: } \Sigma T_f = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

$$\gamma) \quad 2 \leq x \leq 4 \stackrel{f(\uparrow)}{\Rightarrow} f(2) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow 4 \leq f(x) \leq \frac{16}{3} \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in [2, 4]$$

$$\text{Άρα: } E(\Omega) = \int_2^4 |f(x) - 0| dx = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{x^2}{x-1} dx = \int_2^4 \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} dx = \int_2^4 \frac{x^2 - 1}{x-1} dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= \int_2^4 (x+1) dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right)_2^4 + (\ln|x-1|)_2^4 = \left(\frac{4^2}{2} + 4 \right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) + \ln 3 - \ln 1 =$$

$$= 8 + 4 - 2 - 2 + \ln 3 \Rightarrow E(\Omega) = 8 + \ln 3 \text{ Τμ}$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Έστω ότι η f δεν είναι αντιστρέψιμη στο $R \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η f δεν είναι '1-1' στο R

Άρα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha) = f(\beta) \quad (\alpha < \beta)$

Τότε όμως για την f ισχύουν:

- Η f συνεχής στο $[a, \beta]$
- Η f παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

(Rolle) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : f'(x_0) = 0$ **(ΑΤΟΠΟ** από υπόθεση)

Άρα η f είναι αντιστρέψιμη στο R

Γ2. Από (Υ) έχω: $\begin{cases} \text{η } C_f \text{ διέρχεται από το } A(-2,1) \Leftrightarrow f(-2)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=-2 \\ \text{η } C_f \text{ διέρχεται από το } B(1,7) \Leftrightarrow f(1)=7 \Leftrightarrow f^{-1}(7)=1 \end{cases}$

Άρα $f^{-1}(-6 + f(x^2 - 8)) = -2 \Leftrightarrow -6 + f(x^2 - 8) = f(-2) \Leftrightarrow -6 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow$
 $f(x^2 - 8) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 8 = f^{-1}(7) \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = -3 \end{cases}$

Γ3.

- Η f συνεχής στο $[-2,1]$
- Η f παραγωγίσιμη στο $(-2,1)$

(Θ.Μ.Τ.) $\exists x_0 \in (-2,1) : f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{7-1}{1+2} \Rightarrow f'(x_0) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow f'(x_0) \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M((x_0), f(x_0))$, $x_0 \in (-2,1)$ έτσι ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon) : x + 2y - 3 = 0$

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Από (Υ) έχω: $\left\{ \begin{array}{l} \text{η } f \text{ συνεχής στο } R \\ \text{και} \\ f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in R \end{array} \right\} \Rightarrow$

Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

Επίσης, από (Υ) : Η C_f τέμνει τον θετικό ημιάξονα $Oy \Rightarrow f(0) > 0$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R \Rightarrow F(\uparrow)$ στο R

Από (Υ) : $F(1) = 0 \Rightarrow \eta \ x_0 = 1$ είναι προφανής ρίζα της $F(x) = 0$

η $F(\uparrow)$ στο R άρα η F είναι "1-1" στο R

άρα η $x_0 = 1$ είναι μοναδική ρίζα της $F(x) = 0$

$$\text{τότε: } \begin{cases} x < 1 \xRightarrow{F(\uparrow)} F(x) < F(1) \Rightarrow F(x) < 0 \\ x > 1 \xRightarrow{F(\uparrow)} F(x) > F(1) \Rightarrow F(x) > 0 \end{cases}$$

Η μεταβολή της g δίνεται άρα από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$F(x)$	-	$\circ$	+
$f(x)$	+		+
$g(x)$	-	$\circ$	+

$$\text{Άρα αν: } \begin{cases} \alpha \vee x \in (-\infty, 1): g(x) < 0 \\ \alpha \vee x \in (1, +\infty): g(x) > 0 \\ \alpha \vee x = 1: g(1) = 0 \end{cases}$$

Δ2. Θεωρώ την $Q(x) = g(x) \cdot (x-2), x \in [1, 2]$

i) η Q συνεχής στο $[1, 2]$

ii) η Q παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$

$$\begin{aligned} Q'(x) &= (g(x) \cdot (x-2))' = g'(x)(x-2) + g(x) = \left(\frac{F(x)}{f(x)} \right)' \cdot (x-2) + \frac{F(x)}{f(x)} = \\ &= \frac{F'(x) \cdot f(x) - F(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} \cdot (x-2) + \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{f^2(x) - F(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} \cdot (x-2) + \frac{F(x)}{f(x)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q'(x) = \left(1 - \frac{F(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} \right) (x-2) + \frac{F(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \left. \begin{aligned} Q(1) &= g(1) \cdot (1-2) = 0 \\ Q(2) &= g(2) \cdot (2-2) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q(1) = Q(2)$$

(Rolle): Υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$a \in (1, 2): Q'(a) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{F(a) \cdot f'(a)}{f^2(a)} \right) \cdot (a-2) + \frac{F(a)}{f(a)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{F(a)}{f(a)} = - \left(1 - \frac{F(a) \cdot f'(a)}{f^2(a)} \right) \cdot (a-2) \Rightarrow$$

$$\frac{F(a)}{f(a)} = (2-a) \cdot \left(1 - \frac{F(a) \cdot f'(a)}{f^2(a)} \right) \stackrel{a \neq 2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{F(a)}{f(a)(2-a)} = 1 - \frac{F(a) \cdot f'(a)}{f^2(a)}$$

Δ3. Α' Τρόπος:

Θεωρώ $G(x) = f(x) + F(x) - xf(x)$, $x \in \mathfrak{R}$

$$G'(x) = (f(x) + F(x) - xf(x))' = f'(x) + F'(x) - (f(x) + xf'(x)) =$$

$$= f'(x) + \cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} - xf'(x) \Rightarrow G'(x) = (1-x)f'(x), x \in \mathfrak{R}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	$\circ$	-
$f'(x)$	-	$\times$	-
$G': \Gamma \Pi \Lambda$	-	$\circ$	+
G			

[min]

Άρα $\forall x \in \mathfrak{R} : G(x) \geq G(1) \Rightarrow f(x) + F(x) - xf(x) \geq f(1) + F(1) - f(1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) + F(x) - xf(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) + F(x) \geq xf(x), \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Β' Τρόπος:

i) Για $x = 1$ ισχύει προφανώς ως ισότητα

ii) αν $x \in (-\infty, 1)$

Θεωρώ $F(t), t \in [x, 1]$

- η F συνεχής στο $[x, 1]$
- η F παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$

$$\begin{aligned}(\Theta.Μ.Τ.) \quad \exists t_0 \in (x, 1) : F'(t_0) &= \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \Rightarrow f(t_0) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \Rightarrow f(t_0) = \frac{F(x)}{x - 1} \Rightarrow \\ t_0 > x &\stackrel{f(\downarrow)}{\Rightarrow} f(t_0) < f(x) \Rightarrow \frac{F(x)}{x - 1} < f(x) \Rightarrow F(x) > (x - 1) \cdot f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x) > xf(x) - f(x) \Rightarrow f(x) + F(x) > xf(x)\end{aligned}$$

iii) αν $x \in (1, +\infty)$

Θεωρώ $F(t), t \in [1, x]$

- η F συνεχής στο $[1, x]$
- η F παραγωγίσιμη στο $(1, x)$

$$\begin{aligned}(\Theta.Μ.Τ.) \quad \exists t_0 \in (1, x) : F'(t_0) &= \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \Rightarrow f(t_0) = \frac{F(x)}{x - 1} \\ t_0 < x &\stackrel{f(\downarrow)}{\Rightarrow} f(t_0) > f(x) \Rightarrow \frac{F(x)}{x - 1} > f(x) \Rightarrow F(x) > (x - 1) \cdot f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow F(x) > xf(x) - f(x) \Rightarrow f(x) + F(x) > xf(x)\end{aligned}$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + F(x) \geq xf(x)$

Από την ανίσωση $f(x) + F(x) \geq xf(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) + F(x) - xf(x) &\geq 0 \Rightarrow \int_0^1 (f(x) + F(x) - xf(x)) dx > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 F(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (x)' F(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + (xF(x)) \Big|_0^1 - \int_0^1 xF'(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx + \overset{0}{\nearrow} F(1) - \overset{0}{\nwarrow} F(0) - \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 xf(x) dx &> 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - 2 \int_0^1 xf(x)dx > 0 \Rightarrow 2 \int_0^1 xf(x)dx < \int_0^1 f(x)dx$$

Δ4. Θεωρώ $D(x) = \left(f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx \right) \cdot x - f(x)(1-x), x \in [0,1]$

i) η D συνεχής στο $[0,1]$

ii) $D(0) = -f(0) < 0$

$$D(1) = f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx$$

Όμως: από την $f(x) + F(x) > xf(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

για $x=0$ έχω: $f(0) + F(0) > 0 \Rightarrow$

$$f(0) > -F(0) \Rightarrow f(0) > F(1) - F(0) \Rightarrow_{\text{ορσ}}$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) > \int_0^1 f(x)dx &\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < f(0) \\ \text{Όμως ισχύει: } 2 \int_0^1 xf(x)dx &< \int_0^1 f(x)dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 xf(x)dx < f(0) \Rightarrow f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(1) > 0$$

(Bolzano) Υπάρχει (1) τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$:

$$D(\xi) = 0 \Rightarrow \left(f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx \right) \cdot \xi - f(\xi) \cdot (1-\xi) = 0 \Rightarrow_{\xi \neq 0,1}$$

$$\Rightarrow \frac{f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx}{1-\xi} = \frac{f(\xi)}{\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta(\varepsilon): \frac{f(0) - 2 \int_0^1 xf(x)dx}{1-x} = \frac{f(x)}{x} \text{ έχει (1) τουλάχιστον πραγματική ρίζα.}$$

*Από την Ομάδα Μαθηματικών
του Εκπαιδευτικού Οργανισμού*